

## CASMEF Working Paper Series

EQUITY OPTIONS, CREDIT DEFAULT SWAPS E LEVERAGE: UN SEMPLICE MODELLO A  
VOLATILITA' STOCASTICA PER I DERIVATI AZIONARI E CREDITIZI

*Gaia Barone*

Working Paper No. 5  
March 2012

**Arcelli Centre for Monetary and Financial Studies**  
Department of Economics and Business  
LUISS Guido Carli  
Viale Romania 32, 00197, Rome -- Italy  
<http://casmef.luiss.edu>

© Gaia Barone. The aim of the series is to diffuse the research conducted by CASMEF Fellows. The series accepts external contributions whose topics are related to the research fields of the Center. The views expressed in the articles are those of the authors and cannot be attributed to CASMEF.

**EQUITY OPTIONS, CREDIT DEFAULT SWAPS E LEVERAGE:  
UN SEMPLICE MODELLO A VOLATILITÀ STOCASTICA  
PER I DERIVATI AZIONARI E CREDITIZI**

*Gaia Barone* (\*)

(Università degli Studi di Roma "Tor Vergata")

[gaiabarone@gmail.com](mailto:gaiabarone@gmail.com)

Versione originale: febbraio 2011 Versione corrente: giugno 2011

**Sintesi**

Lo scopo di questo lavoro è quello di definire un modello che permetta ai *traders* di stimare il valore dei derivati azionari e creditizi nell'ambito dello stesso schema teorico. Le formule chiuse proposte consentono ai *traders* di valutare *equity*, *equity options* e *credit default swaps* (CDSs) in modo coerente. Il modello può anche essere utilizzato per risolvere il problema inverso, ossia quello di estrarre informazioni sensibili al rischio di credito dalle quotazioni di mercato dei derivati azionari e creditizi. In particolare, è possibile stimare il *leverage* aziendale, così com'è percepito dai *traders*. Queste finalità sono state perseguite con un modello *à la* Leland (1994), in cui gli azionisti dispongono di un'opzione americana perpetua che consente loro di dichiarare in qualsiasi istante il fallimento della società. Dopo aver sostenuto che il debito può essere modellato in termini di un'unica emissione obbligazionaria perpetua e definito il *leverage*, abbiamo dimostrato la natura stocastica dell'*equity volatility* e abbiamo ricavato le *term structures* delle probabilità d'insolvenza e dei CDS *spreads* utilizzando la *first-passage time distribution function*. Abbiamo poi ricavato nuove formule per le *equity calls* e le *equity puts*. Queste formule, che dipendono dal *leverage*,  $L$ , e utilizzano la funzione di distribuzione normale univariata, sono coerenti con il *volatility skew* osservato nel mercato delle *equity options* e convergono verso le equazioni Black-Scholes-Merton (BSM) per  $L \rightarrow 1$ . Tutte le lettere greche sono funzioni elementari delle corrispondenti lettere del modello BSM. Il lavoro si chiude con due applicazioni: Lehman Brothers e General Motors.

**Journal of Economic Literature** - classificazione: G13 (Financial Economics, General Financial Markets, Contingent Pricing; Options Pricing).

**Keywords:** *equity options*, *credit default swaps*, *leverage*, volatilità stocastica, opzioni perpetue, *first-touch digitals*, lettere greche, probabilità d'insolvenza, *put-call parity*.

---

(\*) Questo lavoro è stato scritto per il dottorato in *Money and Finance* all'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata". Desidero ringraziare Domenico Cuoco (il mio relatore), Jeffrey Williams e Roberto Renò per gli utili commenti su precedenti versioni. Eventuali errori presenti in questa versione sono di mia esclusiva responsabilità.

# INDICE

1. Introduzione...	3
2. Struttura del Capitale...	4
<i>Azionisti</i> ...	5
<i>Dinamica del Valore delle Attività</i> ...	5
<i>Contratti</i> ...	6
<i>Payouts</i> ...	7
<i>Default Point e Rinegoziazione</i> ...	7
<i>Greche</i> ...	8
<i>Leverage</i> ...	8
<i>Equity Volatility</i> ...	8
<i>Debito con Scadenza Infinita</i> ...	9
<i>Differenze Rispetto al Modello Originale di Leland</i> ...	11
3. Term Structure delle Probabilità d'Insolvenza e dei CDS Spreads...	12
<i>Probabilità d'Insolvenza</i> ...	12
<i>CDS Spreads</i> ...	14
4. Equity Options...	15
<i>Put-Call Parity</i> ...	16
<i>Stima del Modello</i> ...	17
5. Due Applicazioni: Lehman Brothers e General Motors...	18
<i>Lehman Brothers</i> ...	19
<i>General Motors</i> ...	21
6. Conclusioni...	22
Riferimenti Bibliografici...	24

## 1. INTRODUZIONE

Lo scopo di questo lavoro è quello di definire un modello che permetta ai *traders* di stimare il valore dei derivati azionari e creditizi nell'ambito dello stesso schema teorico. Le formule chiuse proposte consentono ai *traders* di valutare *equity*, *equity options* e *credit default swaps* (CDSs) in modo coerente. Il modello può anche essere utilizzato per risolvere il problema inverso, ossia quello di estrarre informazioni sensibili al rischio di credito dalle quotazioni di mercato dei derivati azionari e creditizi. In particolare, è possibile stimare il *leverage* aziendale, così com'è percepito dai *traders*.

Spesso, nei mercati delle *equity options*, i *traders* quotano le volatilità implicite delle opzioni europee – calcolate in base al modello Black-Scholes-Merton – piuttosto che i prezzi. Le quotazioni riflettono l'aspetto della distribuzione probabilistica dei futuri tassi di rendimento dell'attività sottostante. In genere, le volatilità implicite diminuiscono col crescere del prezzo d'esercizio, disegnando un tipico *volatility skew* inclinato negativamente. Questa configurazione è coerente con l'ipotesi che l'effettiva distribuzione dei futuri tassi di rendimento utilizzata dagli *option traders* abbia una coda sinistra più spessa rispetto a quella della distribuzione normale del modello Black-Scholes-Merton.

Una possibile spiegazione del *volatility skew* riguarda il *leverage*.<sup>1</sup>

Se il valore delle azioni di una società diminuisce, il *leverage* aumenta. Ne segue che le azioni diventano più rischiose e la loro volatilità aumenta. Se il valore delle azioni aumenta, il *leverage* diminuisce. Ne segue che le azioni diventano meno rischiose e la loro volatilità diminuisce. Sulla base di quest'argomentazione, dovremmo attenderci che la volatilità delle azioni sia una funzione decrescente del prezzo ...

Per definire il *leverage*, dobbiamo prima definire il debito. Un approccio utile è quello di assumere che la miscela di obbligazioni con diverse cedole, finanziamenti bancari e non bancari di un'impresa possa essere approssimata da un'unica obbligazione perpetua a tasso fisso con la stessa «*duration* stocastica» (*stochastic duration*) del debito effettivo.<sup>2</sup> L'ipotesi di un titolo provo di scadenza non è solo matematicamente conveniente, ma è anche una buona *proxy* per un debito a breve che viene di volta in volta rinnovato, in modo simile a un «titolo a tasso variabile» (*floater*) perpetuo. Quest'ipotesi è stata estesamente utilizzata da Leland (1994, 1995, 2006, 2009).<sup>3</sup> Nel suo modello, gli azionisti hanno una *perpetual option to default* che consente loro di dichiarare in qualsiasi istante il fallimento della società. Le nostre varianti rispetto al modello originale di Leland (1994) sono nello spirito di Goldstein-Ju-Leland (2001), dove l'*equity* dipende dall'aliquota fiscale.

Nei mercati dei *credit default swaps*, la *term structure* dei CDS *spreads* riflette le aspettative degli operatori circa il rischio d'insolvenza dell'impresa per vari orizzonti temporali (tipicamente 1, 3, 5, 7, 10 anni) e i premi richiesti a fronte del rischio di credito e di liquidità. Il principale vantaggio dei modelli strutturali à la Leland è che la «barriera dell'insolvenza» (*default barrier*) viene determinata in modo endogeno, come soluzione di un problema di ottimizzazione. Ciò consente di ricavare formule chiuse per probabilità d'insolvenza e CDS *spreads* che fanno uso della *first-passage time distribution function*. Non dobbiamo stimare separatamente valori *ad hoc* dei *recovery rates*.

La struttura del lavoro è la seguente. Innanzitutto, caratterizziamo i diritti vantati dai principali *stakeholders*, quindi sosteniamo che il debito effettivo può essere approssimato da un titolo perpetuo equivalente e mettiamo in evidenza le differenze rispetto al modello originale di Leland. Dopo aver definito il *leverage*, mostriamo la natura stocastica dell'*equity volatility* e ricaviamo le *term structures* delle probabilità d'insolvenza e dei CDS *spreads*. Infine, ricaviamo nuove formule per le *equity options* e mostriamo come si possono stimare i parametri del modello in base alle quotazioni di *equity* ed *equity options*. In particolare, vedremo come utilizzare i dati di mercato per estrarre le percezioni dei *traders* circa il *leverage* dell'impresa. Due applicazioni chiudono il lavoro.

<sup>1</sup> HULL, John C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 8<sup>th</sup> ed., Pearson, p. 415, 2011.

<sup>2</sup> La *duration* stocastica di un'obbligazione è definita come vita residua di uno *zero-coupon bond* con la stessa sensitività alle variazioni dei tassi d'interesse, ossia con lo stesso «rischio base» (*basis risk*). «Se vogliamo che la *duration* stocastica,  $D_3$ , sia una *proxy* del rischio base dei *coupon bonds* misurato in unità di tempo, allora è naturale definirla come vita residua di un *discount bond* con lo stesso livello di rischio.» (p. 56). Si veda COX, John C., INGERSOLL, Jonathan E., e ROSS, Stephen A., «Duration and the Measurement of Basis Risk», *Journal of Business*, vol. 52, no. 1, pp. 51-61, January 1979.

<sup>3</sup> LELAND, Hayne, «Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure», *Journal of Finance*, 49 (4), pp. 1213-52, September 1994. LELAND, Hayne, «Bond Prices, Yield Spreads, and Optimal Capital Structure with Default Risk», Finance Working Paper no. 240, Haas School of Business, University of California at Berkeley, January 1995. LELAND, Hayne, «Princeton Lectures» [Lecture 1 - Pros and Cons of Structural Models - An Introduction, Lecture 2 - A New Structural Model, Lecture 3 - Financial Synergies and the Optimal Scope of the Firm - Implications for Mergers and Structured Finance], 2006. LELAND, Hayne, «Structural Models and the Credit Crisis», China International Conference in Finance, July 8, 2009.

**TAVOLA 1** Contratti tra *stakeholders*.

Contratti	Stakeholders			
	Azionisti	Obbligazionisti	Terzi	Tax Authority
Assets	$V_0$	-	-	-
Risk-free bond	$-Z$	$Z$	-	-
Option to default	$P \equiv (Z - V_b) p_b$	$-P \equiv -(Z - V_b) p_b$	-	-
Bankruptcy security	-	$-A \equiv -\alpha V_b p_b$	$A \equiv \alpha V_b p_b$	-
Tax claims	$-G_S \equiv -\theta (V_0 - Z + P)$	$-G_B \equiv -\theta (Z - P - A)$	$-G_U \equiv -\theta A$	$G_0 \equiv G_S + G_B + G_U$
Total	$S_0 \equiv (1 - \theta) (V_0 - Z + P)$	$B_0 \equiv (1 - \theta) (Z - P - A)$	$U_0 \equiv (1 - \theta) A$	$G_0 \equiv \theta V_0$

Nota:  $p_b$  è il valore di una *first-touch digital option* perpetua che paga \$1 quando  $V = V_b$  al tempo dell'insolvenza  $\tau$ .

## 2. STRUTTURA DEL CAPITALE

Le relazioni contrattuali tra le varie «parti interessate alle fortune dell'impresa» (*firm's stakeholders*) sono state sintetizzate nella Tavola 1. La proprietà dell'impresa è condivisa da azionisti, obbligazionisti, terzi (avvocati, revisori, tribunali, ecc.) e «autorità fiscali» (*tax authority*), che hanno il diritto di ricevere la quota  $\theta$  degli utili aziendali ( $\theta$  è l'aliquota fiscale). Il valore delle attività,  $V$ , è diviso in due parti:  $\theta V$  alla *tax authority* e  $(1 - \theta)V$  agli altri *stakeholders*.

Gli azionisti hanno emesso un titolo perpetuo con valore nominale  $Z$ , cedola  $C = rZ$  e valore di mercato  $B$ . Data la responsabilità limitata dell'impresa, essi hanno un'option to default, ossia il diritto (perpetuo) di cedere le attività agli obbligazionisti al prezzo  $Z$ . In altri termini, gli azionisti hanno una *put* americana perpetua, con *strike*  $Z$  e valore di mercato  $P$ , scritta su  $V$ .

Quando  $V = V_b$ , gli azionisti esercitano la loro *option to default*. L'esercizio impedisce al valore dell'*equity* di diventare negativo. Quando l'opzione (*put*) viene esercitata, gli azionisti cedono le attività dell'impresa, il cui valore è  $V_b$ , e ricevono  $Z$  dagli obbligazionisti. Il fallimento innesca l'esecuzione di un altro contratto. Quando l'impresa fallisce, i terzi reclamano la quota  $\alpha$  dell'impresa.

Pertanto, i contratti “negoziati” tra le varie parti sono i seguenti:

1. gli azionisti utilizzano il loro capitale per comprare le attività aziendali. Le attività, il cui valore corrente è  $V_0$ , possono essere tangibili o intangibili (incluso il capitale umano);
2. la *Tax Authority* reclama la quota  $\theta$  delle attività aziendali non appena l'impresa viene creata (la *Tax Authority* è uno *special partner* degli azionisti). Ha quindi un *tax claim* con valore  $\theta V_0$ ;
3. gli obbligazionisti comprano un titolo a tasso fisso perpetuo dagli azionisti. Il valore nominale del *corporate bond*, con cedola  $C$ , è  $Z$ . Il titolo contiene due opzioni incorporate, entrambe corte: un'option to default perpetua a favore degli azionisti e una *digital option* perpetua (ossia un *bankruptcy security*) a favore di terzi. L'option to default, con *strike*  $Z$ , viene esercitata al tempo dell'insolvenza  $\tau$ , quando  $V = V_b$ . La *digital option* perpetua, con barriera  $V_b$ , offre un «conguaglio» (*rebate*)  $\alpha V_b$  ( $0 < \alpha < 1$ ) in  $\tau$ . Quando il *corporate bond* viene emesso, gli oneri fiscali  $\theta V_0$  vengono redistribuiti tra le parti, per tener conto dei nuovi soggetti (obbligazionisti e terzi).

I valori correnti dei quattro titoli (azioni, *corporate bond*, *bankruptcy security*, *tax claim*) sono, rispettivamente,  $S_0$ ,  $B_0$ ,  $U_0$ ,  $G_0$ .

Per ipotesi, gli individui (azionisti, obbligazionisti, terzi) sono tassati in base alla stessa aliquota effettiva,  $\theta$ . Inoltre, gli azionisti, gli obbligazionisti e i terzi sono tassati, rispettivamente, solo quando vengono pagati i dividendi, gli interessi e gli onorari. Pertanto, al fine di evitare la doppia tassazione, gli utili accantonati non vengono tassati.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Nella simbologia utilizzata da Goldstein-Ju-Leland (2001), gli interessi pagati agli investitori vengono tassati in base all'aliquota personale  $\tau_i$ , i dividendi «effettivi» (*effective*) vengono tassati in base a  $\tau_d$ , e gli utili societari in base a  $\tau_c$ . In questo lavoro si assume  $\tau_d = \tau_i$  e  $\tau_c = 0$ . Pertanto, l'aliquota fiscale effettiva,  $\tau_{\text{eff}}$ , definita da  $(1 - \tau_{\text{eff}}) = (1 - \tau_c)(1 - \tau_d)$  è semplicemente pari a  $\tau_d = \tau_i$  (e a  $\theta$ , nella nostra notazione).

## Azionisti

La *Tax Authority* è lunga su un semplice contratto lineare, con valore corrente

$$G_0 \equiv \theta V_0 \quad (1)$$

Questo contratto è la risultante di tre sub-contratti:

1. un diritto nei confronti degli azionisti, con valore corrente  $G_S = \theta (V_0 - Z + P)$ ;
2. un diritto nei confronti degli obbligazionisti, con valore corrente  $G_B = \theta (Z - P - A)$ ;
3. un diritto nei confronti dei terzi, con valore corrente  $G_U = \theta A$ .

I terzi (avvocati, ecc.) hanno un portafoglio con valore corrente

$$U_0 \equiv (1 - \theta) A \quad (2)$$

Essi sono:

1. lunghi sul *bankruptcy security* perpetuo, con valore corrente  $A$ , comprato dagli obbligazionisti;
2. corti sul *tax claim*  $G_U \equiv \theta A$ .

Gli obbligazionisti hanno un portafoglio con valore corrente

$$B_0 \equiv (1 - \theta)(Z - P - A) \quad (3)$$

Essi sono:

1. lunghi sul *risk-free bond* perpetuo, con valore costante  $Z$ , comprato dagli azionisti;
2. corti sull'*option to default* perpetua, con valore corrente  $P$ , venduta agli azionisti;
3. corti sul *bankruptcy security* perpetuo, con valore corrente  $A$ , venduto ai terzi;
4. corti sul *tax claim*  $G_B = \theta (Z - P - A)$ .

Infine, gli azionisti hanno un portafoglio con valore corrente

$$S_0 \equiv (1 - \theta)(V_0 - Z + P) \quad (4)$$

Essi sono:

1. lunghi sulle attività aziendali, con valore corrente  $V_0$ ;
2. corti sul *risk-free bond* perpetuo, con valore costante  $Z$ , venduto agli obbligazionisti;
3. lunghi sull'*option to default* perpetua, con valore corrente  $P$ , comprata dagli obbligazionisti;
4. corti sul *tax claim*  $G_S = \theta (V_0 - Z + P)$ .

Si noti che il valore complessivo delle passività,  $S_0 + B_0 + U_0 + G_0$ , è uguale al valore delle attività dell'impresa,  $V_0$ :

$$\begin{aligned} S_0 + B_0 + U_0 + G_0 &= (1 - \theta)(V_0 - Z + P) + (1 - \theta)(Z - P - A) + (1 - \theta)A + \theta V_0 \\ &= V_0 \end{aligned} \quad (5)$$

## Dinamica del Valore delle Attività

La dinamica del valore,  $V$ , delle attività aziendali è descritta da un processo stocastico di tipo diffusivo con equazione differenziale stocastica

$$dV = (\mu_V - q_V)V dt + \sigma_V V dz$$

dove

- $\mu_V$  è il tasso di rendimento atteso dell'impresa per unità di tempo;
- $q_V$  è il *payout rate* (a favore di azionisti, obbligazionisti e *Tax Authority*);
- $\sigma_V$  è la volatilità delle attività (ossia la deviazione standard del tasso di rendimento delle attività per unità di tempo);
- $dz$  è un processo di Wiener.

In base all'argomentazione della replica dinamica di Merton, il prezzo,  $f$ , di un qualsiasi derivato che non dipende dal tempo e non comporta pagamenti intermedi (come l'*option to default* perpetua o il *bankruptcy security*) deve soddisfare la seguente equazione differenziale

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dV^2} \sigma_V^2 V^2 + (r - q_V) V \frac{df}{dV} - rf = 0$$

dove  $r$  è il tasso d'interesse privo di rischio.

In questo contesto, è appropriato notare che l'argomentazione di Merton vale anche se tutte le attività dell'impresa non sono né negoziabili né osservabili. Anche se  $V$  non è il valore di un'attività negoziabile, è la negoziabilità dell'*equity* che consente di utilizzare  $V$  come variabile di stato.<sup>5</sup>

Per comprendere l'intuizione della replica dinamica, si consideri il modello standard della valutazione delle opzioni. L'opzione può essere valutata perché possiamo replicarne il *payoff* con un portafoglio di azioni e obbligazioni prive di rischio. Tuttavia, anche l'azione può essere replicata da un portafoglio di opzioni e obbligazioni prive di rischio. Analogamente, le attività di un'impresa possono essere replicate con un portafoglio di opzioni e obbligazioni prive di rischio. [Ericsson & Reneby (2002), p. 5]

Sotto l'ipotesi che  $V$  segua un moto geometrico Browniano, possiamo valutare i contratti negoziati dai vari *stakeholders*.

## Contratti

Il valore corrente,  $A$ , del *bankruptcy security* è pari a:

$$A = \alpha V_b p_b \quad (6)$$

dove

$\alpha$  è il rapporto tra le spese fallimentari (dirette e indirette) e il valore di mercato delle attività prima dell'insolvenza;<sup>6</sup>

$V_b$  è il *default trigger*, scelto dagli azionisti in modo da massimizzare il valore dell'*equity*.<sup>7</sup>

$$V_b = Z \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \quad (7)$$

$p_b$  è il valore della *first-touch digital option* perpetua che paga \$1 quando  $V = V_b$ .<sup>8</sup>

$$p_b = (V_0 / V_b)^{\gamma_2} \quad (8)$$

$\gamma_2$  è l'elasticità della *first-touch digital option* perpetua rispetto a  $V$ :

$$\gamma_2 \equiv \frac{-(r - q_V - \sigma_V^2 / 2) - \sqrt{(r - q_V - \sigma_V^2 / 2)^2 + 2\sigma_V^2 r}}{\sigma_V^2}$$

$Z$  è il valore costante del *risk-free bond* perpetuo:

$$Z = \frac{C}{r} \quad (9)$$

$C$  è la cedola istantanea (su base annua) del *risk-free bond* perpetuo.

<sup>5</sup> ERICSSON, Jan, e RENEBY, Joel, "A Note on Contingent Claims Pricing with Non-Traded Assets", SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 314, June 2002.

<sup>6</sup> Goldstein-Ju-Leland (2001, nota 20, p. 497) riportano che le spese fallimentari dirette, stimate da Warner (1977), sono pari all'1% dell'attivo: "... in media, le spese fallimentari sono pari all'1% del valore di mercato dell'impresa prima dell'insolvenza" [Warner (1977), p. 377]. Si veda WARNER, Jerold B., "Bankruptcy Costs: Some Evidence", *Journal of Finance*, vol. 32, no. 2, pp. 337-47, May 1977. Tuttavia, tenendo conto dei costi indiretti, Goldstein-Ju-Leland scelgono  $\alpha = 5\%$  per il loro scenario base.

<sup>7</sup> Come vedremo più avanti, questo *default trigger* è diverso da quello originario di Leland [1994, Equazione (14), p. 1222].

<sup>8</sup> Per la dimostrazione di  $p_b$  si veda, ad esempio, BARONE, Gaia, "European Compound Options written on Perpetual American Options", "Tor Vergata" University of Rome, Working Paper, November 2010.

Il valore corrente,  $P$ , dell'*option to default* è pari a:<sup>9</sup>

$$P = (Z - V_b)p_b \quad (10)$$

Pertanto, sostituendo la (10) nella (4), il valore corrente dell'*equity*,  $S_0$ , è pari a

$$S_0 \equiv (1 - \theta)[V_0 - Z + (Z - V_b)(V_0/V_b)^{\gamma_2}] \quad (11)$$

### Payouts

Il modello non consente all'impresa di cambiare il suo *business risk*, misurato da  $\sigma_V$ , che è costante, ma le consente di liquidare le attività per effettuare i pagamenti a titolo di interessi, dividendi e imposte. Il *payout* dell'impresa è definito da  $q_V$

$$\begin{aligned} q_V V &= \text{interessi netti} + \text{dividendi netti} + \text{imposte} \\ &= \text{interessi lordi} + \text{dividendi lordi} \\ &= q_B \frac{B}{1 - \theta} + q_S \frac{S}{1 - \theta} \end{aligned} \quad (12)$$

dove

$q_B$  è il *bond yield* lordo

$$q_B = r \frac{(1 - \theta)Z}{B} \quad (13)$$

$q_S$  è il *dividend yield* lordo.

Il *payout rate*,  $q_V$ , determina il *cash flow*  $q_V V$  che viene prelevato dalle attività dell'impresa. Il residuo di questo *cash flow* (dopo aver pagato gli interessi sul debito) viene distribuito agli azionisti sotto forma di dividendi. Se  $q_V V$  non è sufficiente a coprire le spese per interessi, gli azionisti ricevono un dividendo negativo (ossia versano ulteriori capitali nelle casse dell'impresa). I dividendi negativi (nelle crisi di liquidità) non comportano necessariamente che sia ottimale fallire: le aspettative sui futuri *cash flows* potrebbero essere tali da indurre gli azionisti a mantenere in vita l'impresa.

### Default Point e Rinegoziazione

Gli azionisti devono determinare il *default point* ottimale,  $V_b$ . Noi supporremo che  $V_b$  non sia affetto da possibili rinegoziazioni. In altri termini, gli azionisti delle imprese in crisi non cercheranno di persuadere gli obbligazionisti a rinegoziare i termini contrattuali, anche se è comune interesse cercare di evitare le spese fallimentari.

La sub-ottimalità della rinegoziazione, per azionisti e obbligazionisti, è stata così argomentata da Ingersoll (1987, p. 419):

A questo punto viene naturale la domanda: se l'impresa è insolvente in  $T$ , perché gli obbligazionisti non dovrebbero rinegoziare il contratto nella speranza che la buona sorte possa poi consentire all'impresa di pagarli per intero? La risposta è chiara. In base al contratto, essi hanno il diritto di ricevere tutte le attività dell'impresa. Perché dovrebbero accontentarsi di meno? Se le cose andranno bene, potranno tenere per sé tutti gli utili, invece di condividerli. Naturalmente, gli obbligazionisti sarebbero disposti a rinegoziare se gli azionisti versassero nuovi capitali. Tuttavia, i versamenti dovrebbero essere tali da colmare il buco dell'insolvenza e consentire un nuovo investimento nell'impresa rifinanziata. Ma di nuovo, perché gli azionisti dovrebbero farlo? Costerebbe loro più di quanto riceverebbero in cambio.

Pertanto, assumeremo che – in caso d'insolvenza – gli obbligazionisti ricevano tutte le attività (al netto delle spese fallimentari) e gli azionisti nulla.

<sup>9</sup> Il nostro  $Z - P$  è uguale a  $F(V)$  in Black & Cox [(1976), Equazione (16), p. 364], dove  $c = rZ$ ,  $V = V_b$ ,  $V = V_0$  e  $\alpha = -\gamma_2$ :

$$F(V) = \frac{c}{r} + \left( \bar{V}^{\alpha+1} - \frac{c}{r} \bar{V}^{\alpha} \right) V^{-\alpha}$$



Il *default point* ottimale,  $V_b$ , viene scelto dagli azionisti in modo da massimizzare il valore dell'*equity*. Per la (11), la massimizzazione di  $S_0$  rispetto a  $V_b$  comporta

$$V_b = Z \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \quad (14)$$

### Greche

In base alla (4), il valore dell'*equity* è

$$S_0 \equiv (1 - \theta)(V_0 - Z + P) \quad (15)$$

e, in base alla (10) e alla (8), il valore dell'*option to default* perpetua è

$$P = (Z - V_b)(V_0 / V_b)^{\gamma_2}$$

Pertanto, il delta,  $\Delta_P$ , e il gamma,  $\Gamma_P$ , dell'*option to default* perpetua sono

$$\Delta_P \equiv \frac{\partial P}{\partial V} = \gamma_2 \frac{P}{V} \quad (16)$$

$$\Gamma_P \equiv \frac{d^2 P}{dV^2} = \frac{\gamma_2 (\gamma_2 - 1) P}{V^2}$$

mentre il delta,  $\Delta_S$ , e il gamma,  $\Gamma_S$ , dell'*equity* sono

$$\Delta_S \equiv \frac{dS}{dV} = (1 - \theta)(1 + \Delta_P) \quad (17)$$

$$\Gamma_S \equiv \frac{d^2 S}{dV^2} = (1 - \theta)\Gamma_P$$

Prendendo i limiti di  $\Delta_S$  per  $V \rightarrow V_b$  e  $V \rightarrow \infty$ , si può vedere che  $0 \leq \Delta_S < (1 - \theta)$ . Inoltre,  $\Gamma_S > 0$ .

Pertanto,  $S$  è una funzione convessa di  $V$ , coerentemente con la natura opzionale dell'*equity*. La Figura 1 mostra l'*equity*,  $S$ , in funzione del valore delle attività,  $V$ , per diversi livelli del valore nominale del debito,  $Z$ .

### Leverage

Definiamo il *leverage*,  $L$ , come rapporto tra il valore delle attività dopo le imposte,  $V(1 - \theta)$ , e il valore,  $S$ , dell'*equity*:

$$L = \frac{(1 - \theta)V}{S} \quad (18)$$

Sostituendo la (15) nella (18) e prendendo i limiti di  $L$  per  $V \rightarrow \infty$  e  $V \rightarrow V_b$ , si vede che  $1 < L < +\infty$ .

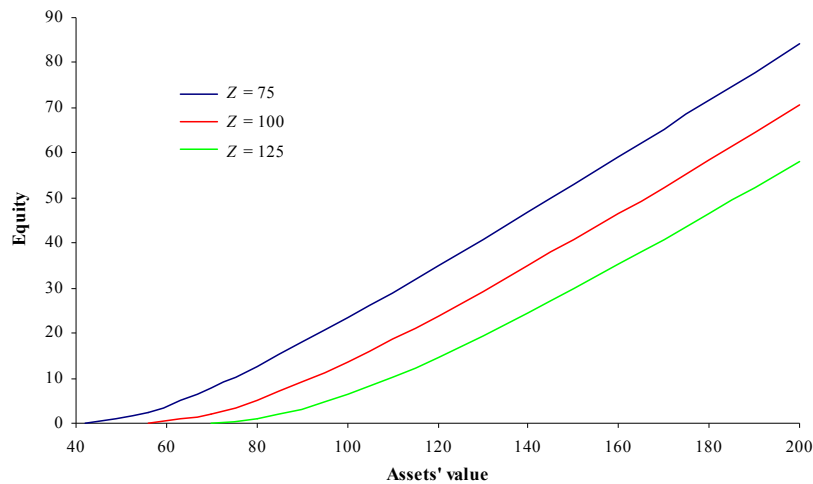
### Equity Volatility

In base al lemma di Itô, l'*equity volatility*,  $\sigma_S$ , è

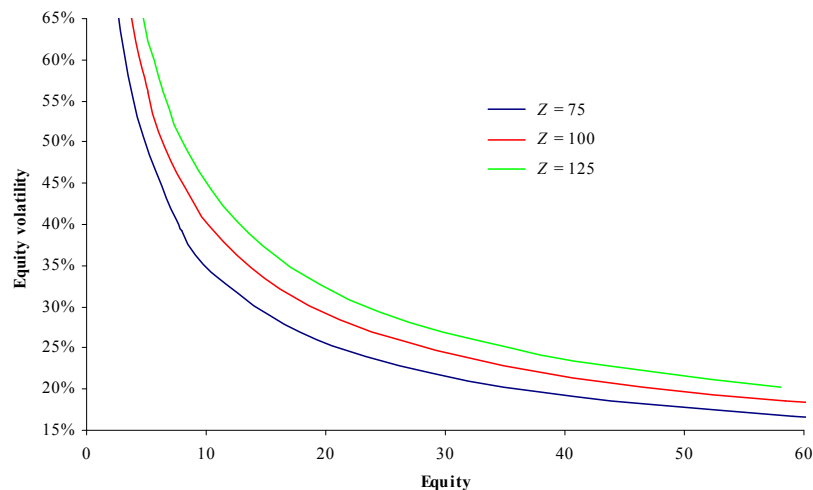
$$\sigma_S = \frac{\Delta_S V \sigma_V}{S} \quad (19)$$

Sostituendo le Equazioni (16)-(18) nella (19) si ottiene

$$\sigma_S = \left(1 + \gamma_2 \frac{P}{V}\right) L \sigma_V \quad (20)$$



**Figura 1** *Equity,  $S$* , in funzione del valore delle attività,  $V$ , per diversi livelli di debito,  $Z$ .  
( $r = 4\%$ ,  $q_V = 6\%$ ,  $\sigma_V = 10\%$ ,  $\theta = 35\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ).



**Figura 2** *Equity volatility,  $\sigma_S$* , in funzione del valore dell'*equity,  $S$* , per diversi livelli di debito,  $Z$ .  
( $r = 4\%$ ,  $q_V = 6\%$ ,  $\sigma_V = 10\%$ ,  $\theta = 35\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ).

L'Equazione (20) rivela la natura stocastica dell'*equity volatility*, che è una funzione complessa di  $V$ .<sup>10</sup> Prendendo i limiti di  $\sigma_S$  per  $V \rightarrow \infty$  e  $V \rightarrow V_b$  si vede che  $\sigma_V < \sigma_S < +\infty$ .

La Figura 2 mostra l'*equity volatility*,  $\sigma_S$ , in funzione del valore dell'*equity,  $S$* , per diversi livelli del valore nominale del debito,  $Z$ .

Alcuni valori di  $\sigma_S$ , in funzione di  $Z$ ,  $q_V$  e  $\sigma_V$ , sono riportati nella Tavola 2, insieme al *dividend yield* ( $q_S$ ), al *leverage* ( $L$ ), al *default trigger* ( $V_b$ ), e ai valori delle passività aziendali ( $S_0$ ,  $B_0$ ,  $U_0$ ,  $G_0$ ).

### Debito con Scadenza Infinita

Una caratteristica fondamentale del modello di Leland è che il debito viene approssimato da un unico *bond* perpetuo. Mentre l'*equity* è semplicemente un diritto residuale, perpetuo, sulle attività aziendali, il debito è molto più difficile da definire in termini generali.

<sup>10</sup> L'Equazione (20) mostra che  $\sigma_S$  è funzione di  $V$ , che è stocastico. In senso stretto, il nostro modello è un *local-volatility model*, che appartiene alla categoria più generale dei modelli a volatilità stocastica. Il termine *fully stochastic-volatility* è stato spesso utilizzato per descrivere i modelli in cui la volatilità delle attività ha una sua propria casualità, generata da un diverso processo di Wiener.

**TAVOLA 2** Passività ( $S_0, B_0, U_0, G_0$ ), default trigger ( $V_b$ ), leverage ( $L$ ), dividend yield ( $q_S$ ) ed equity volatility ( $\sigma_S$ ).

		Z					Z					
		0	25	50	75	100	0	25	50	75	100	
		$q_r$					$q_r$					
		1,3%	2,0%	2,7%	3,5%	4,3%	1,3%	2,0%	2,7%	3,5%	4,3%	
$\sigma_r$	$S_0$	5%	65,00	48,75	32,50	16,53	5,09	0,00	16,25	32,50	48,37	58,84
		10%	65,00	48,75	32,71	18,65	9,11	0,00	16,25	32,25	46,01	54,91
		15%	65,00	48,84	33,75	21,57	13,05	0,00	16,15	31,13	42,99	51,07
		20%	65,00	49,19	35,41	24,65	16,81	0,00	15,77	29,41	39,89	47,39
		25%	65,00	49,84	37,34	27,66	20,38	0,00	15,11	27,45	36,89	43,90
$\sigma_r$	$U_0$	5%	0,00	0,00	0,00	0,10	1,07	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
		10%	0,00	0,00	0,04	0,34	0,97	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
		15%	0,00	0,01	0,12	0,43	0,88	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
		20%	0,00	0,03	0,18	0,46	0,80	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
		25%	0,00	0,05	0,21	0,45	0,72	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
$\sigma_r$	$V_b$	5%	0,00	23,60	46,17	66,02	80,79	1,00	1,33	2,00	3,93	12,77
		10%	0,00	20,62	39,45	55,41	68,15	1,00	1,33	1,99	3,49	7,13
		15%	0,00	17,46	33,14	46,46	57,55	1,00	1,33	1,93	3,01	4,98
		20%	0,00	14,64	27,78	39,08	48,76	1,00	1,32	1,84	2,64	3,87
		25%	0,00	12,28	23,35	33,03	41,49	1,00	1,30	1,74	2,35	3,19
$\sigma_r$	$q_S$	5%	2,00%	2,05%	2,15%	3,03%	5,89%	5,00%	6,67%	10,00%	19,05%	42,82%
		10%	2,00%	2,05%	2,14%	2,68%	3,29%	10,00%	13,33%	19,63%	31,22%	49,92%
		15%	2,00%	2,05%	2,07%	2,32%	2,30%	15,00%	19,90%	27,80%	39,16%	54,40%
		20%	2,00%	2,03%	1,98%	2,03%	1,78%	20,00%	26,17%	34,65%	45,32%	58,28%
		25%	2,00%	2,01%	1,87%	1,81%	1,47%	25,00%	32,07%	40,68%	50,63%	62,00%
$\sigma_r$	$\sigma_S$	5%	5,00%	6,67%	10,00%	19,05%	42,82%	5,00%	6,67%	10,00%	19,05%	42,82%
		10%	10,00%	13,33%	19,63%	31,22%	49,92%	10,00%	13,33%	19,63%	31,22%	49,92%
		15%	15,00%	19,90%	27,80%	39,16%	54,40%	15,00%	19,90%	27,80%	39,16%	54,40%
		20%	20,00%	26,17%	34,65%	45,32%	58,28%	20,00%	26,17%	34,65%	45,32%	58,28%
		25%	25,00%	32,07%	40,68%	50,63%	62,00%	25,00%	32,07%	40,68%	50,63%	62,00%

Nota:  $V_0 = 100, r = 4\%, \theta = 35\%, \alpha = 5\%$ .

Spesso, la scadenza del debito è finita, ma non è sempre così. Leland assume che sia infinita:

Le scadenze molto lunghe per le obbligazioni a tasso fisso non sono nuove, né in teoria né in pratica. L'argomentazione originale di Modigliani e Miller (1958) si basa su un debito con scadenza infinita. Merton (1974) e Black & Cox (1976) esaminano il caso del debito con scadenza infinita in un modello esplicitamente dinamico. Sin dal 1752 la Bank of England ha, di tanto in tanto, emesso i Consols, obbligazioni senza scadenza finale che promettono una cedola fissa. E le «azioni privilegiate» (*preferred stocks*) pagano tipicamente un dividendo fisso senza alcun limite di tempo. [Leland (1994, p. 1215)]

Il debito può essere con cedole o senza cedole, può essere estinto in base a un piano di ammortamento o in un'unica soluzione alla scadenza, può pagare un tasso fisso, variabile o misto, può essere assistito da clausole opzionali (in favore dell'emittente o del portatore), può includere i salari non pagati

e le dilazioni di pagamento concesse dai fornitori, può avere diverse priorità di rimborso in caso di liquidazione dell'impresa. Per finire, il debito è sempre incorporato nei derivati negoziati dall'impresa. E questo debito può essere estremamente rilevante:<sup>11</sup>

Long-Term Capital Management ha usato i suoi \$2,2 miliardi di capitale come garanzia per acquistare \$125 miliardi di titoli, e quindi ha utilizzato questi titoli come garanzia per entrare in transazioni finanziarie esotiche valutate \$1,25 migliaia di miliardi. [Kahn e Truell (1998)]

Nel ben noto approccio di Moody's KMV, il debito di riferimento – utilizzato per definire il *default point* – è semplicemente uguale alle passività a breve termine più metà delle passività a lungo termine, entrambe misurate in unità nominali, contabili, di libro.<sup>12</sup>

Col passare del tempo, la struttura finanziaria dell'impresa (*leverage*, scadenza, ecc.) cambia. Il debito può essere rinnovato in prestiti di più lunga scadenza. In particolare, le imprese possono utilizzare le linee di credito *revolving* o i *loan commitments* – accordati dalle banche o da altre istituzioni finanziarie – per accrescere la flessibilità della loro struttura finanziaria.

Teoricamente, le imprese possono rinnovare il debito un numero infinito di volte. È quindi ragionevole approssimare il debito effettivo con un'obbligazione perpetua a tasso fisso, come in Merton (1974), Black-Cox (1976), Leland (1994), Goldstein-Ju-Leland (2001) e molti altri.<sup>13</sup>

Da un punto di vista teorico, l'indipendenza dal tempo, propria dei titoli perpetui, assicura che la struttura del capitale non cambi improvvisamente, semplificando così l'analisi.<sup>14</sup>

Da un punto di vista empirico, l'ipotesi di un'unica emissione perpetua rappresenta un importante vantaggio rispetto ai modelli nei quali la scadenza del debito è finita, perché non c'è bisogno di stimare il parametro  $T$  che misura la vita residua del debito.<sup>15</sup>

### Differenze Rispetto al Modello Originale di Leland

La struttura del capitale, così come l'abbiamo definita, è diversa da quella utilizzata da Leland (1994). Come in Leland, il valore dell'*equity*,  $S$ , non dipende da  $\alpha$ , che misura le spese fallimentari, ma, diversamente da Leland, l'*equity* dipende dall'aliquota fiscale,  $\theta$ .

Le definizioni di debito,  $D$ , ed *equity*,  $E$ , usate da Leland [1994, Equazioni (7) e (13)] possono essere ottenute fondendo tra loro, rispettivamente, i diritti degli obbligazionisti con quelli della Tax Authority verso gli obbligazionisti e i diritti degli azionisti con quelli della Tax Authority verso gli azionisti più «il valore della deducibilità fiscale degli interessi»,  $TB(V) = \theta Z(1 - p_b)$ .

<sup>11</sup> KAHN, Joseph, and TRUPELL, Peter, "Troubled Investment Fund's Bets Now Estimated at \$1.25 Trillion", *Wall Street Journal*, September 26, 1998.

<sup>12</sup> Il *default point* è così definito da Moody's KMV: "Il punto cui deve scendere il valore delle attività prima che l'impresa non riesca più a far fronte ai pagamenti per capitale o interessi. È all'incirca pari alla somma tra le passività a breve e la metà delle passività a lunga scadenza..." Si veda Moody's KMV "Credit Monitor Quick Reference", 2004.

<sup>13</sup> BLACK, Fischer S., e COX, John C., "Valuing Corporate Securities - Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance* 31 (2), 351-367, 1976. GOLDSTEIN, Robert, JU, Nengjiu, e LELAND, Hayne, "An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure", *Journal of Business*, vol. 74, no. 4, 2001.

Leland (1995) ha anche proposto un «modello esponenziale» (*exponential model*) in cui l'impresa ritira il debito perpetuo, nel corso del tempo, a un tasso proporzionale  $m$ . Questo *roll-over*, con pagamenti regolari e rinnovi di capitale e cedole, dovrebbe garantire la stazionarietà del debito. Tuttavia, Décamps e Villeneuve (2008) hanno dimostrato che quest'estensione del modello originale di Leland non consente di ricavare formule chiuse perché il *default point* non è più costante, ma dipende dal tempo. Si veda LELAND, Hayne, "Bond Prices, Yield Spreads, and Optimal Capital Structure with Default Risk", Finance Working Paper no. 240, Haas School of Business, University of California at Berkeley, January 1995; DÉCAMPS, Jean-Paul, e VILLENEUVE, Stéphane, "On the modeling of Debt Maturity and Endogenous Default - A Caveat", Working Paper, May 2008.

<sup>14</sup> Si noti che, essendo il debito fisso in termini nominali, il *leverage* effettivo tende a diminuire in termini reali col passare del tempo. Un'ipotesi alternativa potrebbe essere quella di rappresentare il debito con un titolo perpetuo a tasso variabile. Tuttavia, se le cedole venissero pagate continuamente al tasso  $r$ , il rischio base, ossia la sensitività del titolo rispetto ai tassi d'interesse, sarebbe nulla (e questo sarebbe in contrasto con l'evidenza empirica). Si veda COX, John C., INGERSOLL, Jonathan E., e ROSS, Stephen A., "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, vol. 35, no. 2, pp. 389-403, May 1980.

<sup>15</sup> MERTON, Robert C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance* 29, No. 2 (May 1974), pp. 449-470, ristampato in Robert C. Merton, *Continuous-Time Finance*, Chapter 12 (Malden, MA: Blackwell, 1990), pp. 388-412.

C'è qualche evidenza empirica che quanto maggiore è  $T$  tanto migliori sono le stime del modello di Merton: «Provando e riprovando, abbiamo riscontrato che scegliendo una scadenza più lunga, e quindi dando maggior peso alla volatilità, si ottengono previsioni più correlate con le osservazioni di mercato. Presenteremo i risultati ottenendo avendo posto  $T = 10$ ». Si veda BAI, Jennie, and WU, Liuren, "Anchoring Corporate Credit Spreads to Firm Fundamentals", Working Paper, June 2010 (p. 9).

In base alla Tavola 1 e alle Equazioni (8) e (10):

$$\begin{aligned}
D &\equiv B_0 + G_B \\
&= (1 - \theta)(Z - P - A) + \theta(Z - P - A) \\
&= Z - P - A \\
&= Z - (Z - V_b)p_b - \alpha V_b p_b \\
&= Z + [(1 - \alpha)V_b - Z]p_b \\
&= Z + [(1 - \alpha)V_b - Z](V_0 / V_b)^{\gamma_2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E &\equiv S_0 + G_S + \theta Z(1 - p_b) \\
&= (1 - \theta)(V_0 - Z + P) + \theta(V_0 - Z + P) + \theta Z(1 - p_b) \\
&= V_0 - Z + P + \theta Z(1 - p_b) \\
&= V_0 - Z + (Z - V_b)p_b + \theta Z(1 - p_b) \\
&= V_0 - (1 - \theta)Z + [(1 - \theta)Z - V_b]p_b \\
&= V_0 - (1 - \theta)Z + [(1 - \theta)Z - V_b](V_0 / V_b)^{\gamma_2}
\end{aligned}$$

La nostra definizione di *equity*,  $S_0$ , è uguale alla definizione di *equity*,  $E_{solv}$ , utilizzata da Goldstein-Ju-Leland [2001, Equazione (19)].<sup>16</sup>

Alcune delle conseguenze del nostro diverso approccio, rispetto a Leland (1994), sono:

1. il valore dell'*equity* dipende dall'aliquota fiscale  $\theta$ ;<sup>17</sup>
2. il *default trigger*,  $V_b$ , è diverso da (più alto di) quello ottenuto da Leland;
3. non è possibile ricavare una struttura ottimale del capitale bilanciando i vantaggi della deducibilità fiscale degli interessi con le spese da sostenere in caso di fallimento.

Un'altra conseguenza è che – per valutare le *equity options* – non possiamo utilizzare le formule ricavate nell'ambito del modello originale di Leland.

### 3. TERM STRUCTURE DELLE PROBABILITÀ D'INSOLVENZA E DEI CDS SPREADS

#### Probabilità d'Insolvenza

Sia  $Q(T)$  la probabilità d'insolvenza tra il tempo 0 e il tempo  $T$  (incluso). Questa probabilità è uguale a quella che  $V$  raggiunga  $V_b$  prima di  $T$  (o in  $T$ ). Pertanto,  $Q(T)$  è uguale alla *first-passage time distribution function*.<sup>18</sup>

$$Q(T) = N(-z_1) + \left(\frac{V_0}{V_b}\right)^{2(1-\lambda)} N(-z_2) \quad (21)$$

dove

$$z_1 = \frac{\ln(V_0 / V_b) + (r - q_V - \sigma_V^2 / 2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

<sup>16</sup> In base all'Equazione (19) di Goldstein-Ju-Leland (2001),  $E_{solv} = (1 - \tau_{eff})(V_{solv} - V_{int})$  dove  $V_{int} = (C/r)(1 - p_B)$ . Nella nostra simbologia,  $S_0 = E_{solv}$ ,  $\theta = \tau_{eff}$ ,  $V_0 - V_b p_b = V_{solv}$ ,  $Z(1 - p_b) = V_{int}$ ,  $p_b = p_B$ . Pertanto,  $S_0 = (1 - \theta)[V_0 - V_b p_b - Z(1 - p_b)] = (1 - \theta)[V_0 + (Z - V_b)p_b - Z] = (1 - \theta)(V_0 + P - Z)$ . Nella simbologia utilizzata da Goldstein-Ju-Leland (2001),  $BC_{def} = \alpha V_{def} = \alpha V_b p_b$  è il valore del *bankruptcy claim*. Noi assumiamo che anche i terzi devono pagare le imposte. Pertanto, la nostra espressione,  $U_0$ , per il valore del *bankruptcy claim* è pari a  $\alpha V_b p_b$  pre-moltiplicato per  $(1 - \theta)$ .

<sup>17</sup> «In contrasto con Leland (1994), l'*equity* è una funzione decrescente di  $\tau_{eff}$ .» [Goldstein *et al*, p. 497].

<sup>18</sup> Si veda l'Equazione (34b), p. 353, in INGERSOLL, Jonathan E., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987. Espressi con i nostri simboli si ha:  $x_0 = \ln(V_0 / V_b)$ ,  $\mu = r - q_V - \sigma_V^2 / 2$ ,  $2\mu / \sigma^2 = 2(\lambda - 1)$ ,  $t_0 = 0$ .

**TAVOLA 3** Probabilità d'insolvenza.

PROBABILITÀ D'INSOLVENZA EFFETTIVE (%)										
[fonte: Moody's (1970-2009)]										
Scadenza (anni)										
Rating	1	2	3	4	5	7	10	15	20	
Aaa	0,000	0,012	0,012	0,037	0,105	0,245	0,497	0,927	1,102	
Aa	0,022	0,059	0,091	0,159	0,234	0,384	0,542	1,150	2,465	
A	0,051	0,165	0,341	0,520	0,717	1,179	2,046	3,572	5,934	
Baa	0,176	0,494	0,912	1,404	1,926	2,996	4,851	8,751	12,327	
Ba	1,166	3,186	5,583	8,123	10,397	14,318	19,964	29,703	37,173	
B	4,546	10,426	16,188	21,256	25,895	34,473	44,377	56,098	62,478	
Caa	17,723	29,384	38,682	46,094	52,286	59,771	71,376	77,545	80,211	

PROBABILITÀ D'INSOLVENZA TEORICHE (%)											
Scadenza (anni)											
Rating	1	2	3	4	5	7	10	15	20	Z	$\sigma_V$ (%)
Aaa	0,000	0,001	0,015	0,057	0,127	0,316	0,614	0,992	1,220	60	11,5
Aa	0,000	0,005	0,051	0,159	0,314	0,683	1,208	1,829	2,196	65	12,0
A	0,001	0,106	0,461	0,973	1,530	2,567	3,766	4,991	5,658	70	12,5
Baa	0,210	2,036	4,528	6,858	8,860	11,970	15,092	18,097	19,768	80	15,0
Ba	1,933	8,363	14,220	18,859	22,533	27,943	33,240	38,468	41,594	90	20,0
B	4,708	16,491	26,138	33,488	39,216	47,592	55,841	64,196	69,418	110	35,0
Caa	13,644	30,656	41,560	49,063	54,588	62,289	69,526	76,567	80,829	140	40,0

Nota: le probabilità d'insolvenza teoriche sono state calcolate in base all'Equazione (21), dopo aver sostituito il tasso d'interesse privo di rischio  $r$  con il *drift rate* effettivo  $\mu_V$ . I parametri del modello sono:  $V = 100$ ,  $\mu_V = 5\%$ ,  $q_V = 0\%$ ,  $\theta = 35\%$ ,  $\alpha = 5\%$  (i valori di  $Z$  e  $\sigma_V$  dipendono dalla classe di *rating*).

$$z_2 = \frac{\ln(V_0/V_b) - (r - q_V - \sigma_V^2/2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$\lambda = 1 + \frac{r - q_V - \sigma_V^2/2}{\sigma_V^2}$$

L'Equazione (21) consente di calcolare la *term structure* delle probabilità d'insolvenza (cumulate) non condizionate e la *term structure* delle probabilità d'insolvenza condizionate (ossia gli *hazard rates* o *default intensities*).

La Tavola 3 mostra che, utilizzando il *drift rate* effettivo  $\mu_V$  invece di  $r$ , il modello può essere calibrato in modo da stimare le *term structures* delle probabilità d'insolvenza effettive.<sup>19</sup>

Nella tavola, le frequenze storiche delle insolvenze, calcolate da Moody's per diverse classi di *rating*, sono state riportate insieme alle probabilità d'insolvenza teoriche ottenute in base a diversi valori dei parametri  $Z$  e  $\sigma_V$  del modello.

<sup>19</sup> Si noti che le probabilità d'insolvenza effettive riportate nella tavola non includono gli elevati premi per il rischio richiesti dai *bond traders* come compenso per l'elevato rischio sistematico dei portafogli obbligazionari.

## CDS Spreads

I *credit default swaps* (CDSs) standard, *single-name*, in cui il compratore di protezione effettua pagamenti periodici e ha il diritto di vendere alla pari le obbligazioni emesse dal soggetto di riferimento, possono essere valutati nell'ambito dello schema teorico definito dal modello.<sup>20</sup>

Per spiegare i calcoli, consideriamo un CDS a  $n$  anni con date di pagamento in  $t_i$  ( $1 \leq i \leq m \times n$ ), dove  $m$  è il numero di pagamenti in un anno. Il valore,  $A_1$ , di una rendita che paga  $1/m$  ad ogni data di pagamento fino alla prima tra due date, quella dell'insolvenza,  $\tau$ , o della scadenza,  $T = t_{m \times n}$ , è

$$A_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m \times n} e^{-y_i t_i} [1 - Q(t_i)] \quad (22)$$

dove  $y_i$  è il tasso privo di rischio per la scadenza  $t_i$  e  $Q(t_i)$  è la probabilità d'insolvenza [(21)].

Faremo l'ipotesi di *instant recovery*. In altri termini, assumeremo che – alla data dell'insolvenza,  $\tau$  – il compratore di protezione riceva un pagamento istantaneo pari a  $1 - R$ , dove il *recovery rate*  $R$  viene determinato in modo endogeno dalla seguente formula:

$$R = \frac{(1 - \alpha)V_b}{Z} \quad (23)$$

Sostituendo la (14) nella (23), il *payoff*  $1 - R$  a favore del compratore di protezione è pari a

$$1 - R = \frac{1 - \alpha \gamma_2}{1 - \gamma_2}$$

Il valore attuale del *payoff* è

$$(1 - R)p_b(T) \quad (24)$$

dove  $p_b(T)$  è il valore di una *first-touch digital option* con scadenza  $T$ , che paga un'unità al tempo  $\tau$  ( $\tau \leq T$ ) se l'impresa fallisce in  $\tau$ .

In genere, i *credit default swaps* specificano che il compratore di protezione deve pagare, al momento dell'insolvenza, il CDS *spread* maturato dalla data dell'ultimo pagamento. Per tener conto di questo rateo, sottraiamo la metà del pagamento standard dal *payoff*  $1 - R$ :

Se le probabilità d'insolvenza e i periodi di godimento delle cedole sono ragionevolmente piccoli e se il rischio d'insolvenza non si concentra alle date di pagamento delle cedole, la differenza di tempo attesa tra l'evento creditizio e la precedente data di pagamento è solo di poco maggiore, in aspettativa, della metà del periodo di godimento. Pertanto, fatta eccezione per i casi estremi, si può ritenere che il CDS equivalga al pagamento, al momento dell'insolvenza, del valore nominale meno il *recovery value* meno la metà del pagamento standard [Duffie-Singleton (2003), pp. 183-4].

Pertanto, il valore attuale,  $A_2$ , del *payoff* netto del CDS è

$$A_2 = \left[ (1 - R) - \frac{1}{2} \frac{s}{m} \right] p_b(T) \quad (25)$$

dove  $s$  è il CDS *spread* su base annua.

Il CDS è equo quando il valore attuale,  $sA_1$ , dei pagamenti è uguale al valore attuale,  $A_2$ , del *payoff* netto, ossia quando

$$sA_1 = A_2 \quad (26)$$

<sup>20</sup> Si veda la Sezione 8.4 ("Model-Based CDS Rates") in DUFFIE, Darrell, and SINGLETON, Ken J., *Credit Risk*, Princeton University Press, 2003.

Sostituendo la (22) e la (25) nella (26), il *breakeven spread* del CDS è

$$s = \frac{(1-R)p_b(T)}{\frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{2} p_b(T) + \sum_{i=1}^{m \times n} e^{-y_i t_i} [1 - Q(t_i)] \right\}} \quad (27)$$

dove il valore,  $p_b(T)$ , della *first-touch digital option* a scadenza finita, con barriera  $V_b < V_0$ , è stata ricavata da Rubinstein e Reiner (1991):<sup>21</sup>

$$p_b(T) = (V_b/V_0)^{a+b} N(-z) + (V_b/V_0)^{a-b} N(-z + 2b\sigma_V\sqrt{T}) \quad (28)$$

con

$$z \equiv \frac{\ln(V_b/V_0)}{\sigma_V\sqrt{T}} + b\sigma_V\sqrt{T} \quad a \equiv \frac{r - q_V - \sigma_V^2/2}{\sigma_V^2} \quad b \equiv \frac{\sqrt{(r - q_V - \sigma_V^2/2)^2 + 2\sigma_V^2 r}}{\sigma_V^2}$$

Si può dimostrare che la (28) converge verso la (8) quando  $T \rightarrow \infty$ .

#### 4. EQUITY OPTIONS

Analogamente a Toft (1994), Toft & Prucyk (1996) e Barone (2011), possiamo ricavare il valore,  $c$ , di una *call* europea, con *strike*  $K$  e scadenza  $T$ , scritta su  $S$  come:<sup>22</sup>

$$c = e^{-rT} E(S_T - K | V_T > V_T^* \cap V_t > V_b) \times \text{Prob}(V_T > V_T^* \cap V_t > V_b) \\ = (1-\theta)(V_{doc} + P_{uop} - Z R_{doc}) - K R_{doc} \quad (29)$$

dove

$V_{doc}$  è il valore di una *down-and-out asset-or-nothing call*, con *strike*  $V_T^*$  e barriera  $V_b$ , che paga  $V_T$  in  $T$  se  $V_T > V_T^*$  e  $V_t > V_b$  ( $0 < t \leq T$ ):

$$V_{doc} = V_0 e^{-q_V T} [N(x) - (V_b/V_0)^{2\lambda} N(y)]$$

$P_{uop}$  è il valore di una *up-and-out asset-or-nothing put*, con *strike*  $P_T^*$  e barriera  $P_b$ , che paga  $P_T$  in  $T$  se  $P_T < P_T^*$  e  $P_t < P_b$ :

$$P_{uop} = P_0 [N(-x_p) - (P_b/P_0)^{2\lambda_p} N(-y_p)]$$

$R_{doc}$  è il valore di una *down-and-out cash-or-nothing call*, con *strike*  $V_T^*$ , barriera  $V_b$  e *rebate* unitario  $R$ , che paga  $R = \$1$  in  $T$  se  $V_T > V_T^*$  e  $V_t > V_b$ :

$$R_{doc} = e^{-rT} [N(x - \sigma_V\sqrt{T}) - (V_b/V_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma_V\sqrt{T})]$$

$V_T^*$  è il valore critico delle attività che fa finire *at the money* la *call*;

$$V_T^* = V_0 e^{(r - q_V - \sigma_V^2/2)T + \varepsilon^* \sigma_V\sqrt{T}}$$

$P_T^*$  è il valore della *first-touch digital option* perpetua quando  $V = V_T^*$ ;

$$P_T^* = P_0 e^{(r - \sigma_P^2/2)T - \varepsilon^* \sigma_P\sqrt{T}}$$

$\varepsilon^*$  è lo *shock* (normale standardizzato) che fa finire *at the money* l'*equity call*;

$N(\cdot)$  è la funzione di distribuzione della normale standardizzata;

e

$$x \equiv \frac{\ln(V_0/V_T^*)}{\sigma_V\sqrt{T}} + \lambda\sigma_V\sqrt{T} \quad x_p \equiv \frac{\ln(P_0/P_T^*)}{\sigma_P\sqrt{T}} + \lambda_p\sigma_P\sqrt{T}$$

<sup>21</sup> RUBINSTEIN, Mark e REINER, Eric, "Unscrambling the Binary Code", *Risk*, vol. 4, no. 9, pp. 75-83, October 1991.

<sup>22</sup> TOFT, Klaus Bjerre Toft, "Options on Leveraged Equity with Default Risk", Walter A. Haas School of Business, University of California at Berkeley, July 1994. TOFT, Klaus Bjerre Toft, e PRUCYK, Bryan, "Options on Leveraged Equity: Theory and Empirical Tests", *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 3, pp. 1151-1180, July 1997. BARONE, Gaia, "Equity Options and Bond Options in Leland Model", "Tor Vergata" University of Rome, Working Paper, March 2011 [downloadable at <http://ssrn.com/author=1004723>].



$$y \equiv \frac{\ln[V_b^2 / (V_0 V_T^*)]}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T} \quad y_P \equiv \frac{\ln[P_b^2 / (P_0 P_T^*)]}{\sigma_P \sqrt{T}} + \lambda_P \sigma_P \sqrt{T}$$

$$\lambda \equiv 1 + \frac{r - q_V - \sigma_V^2 / 2}{\sigma_V^2} \quad \lambda_P \equiv 1 + \frac{r - \sigma_P^2 / 2}{\sigma_P^2} \quad \sigma_P = -\gamma_2 \sigma_V$$

Sotto l'ipotesi che – se l'impresa fallisce in  $\tau$  – il compratore riceve  $K$  in  $T$  (e non in  $\tau$ ), il valore,  $p$ , di una *put* europea, con *strike*  $K$  e scadenza  $T$ , scritta su  $S$  è

$$p = e^{-rT} E[K - S_T | V_T < V_T^* \cap V_t > V_b] \times \text{Prob}(V_T < V_T^* \cap V_t > V_b) + E[e^{-rT} K | V_t \leq V_b] \times \text{Prob}(V_t \leq V_b) \\ = K(R_{dop} + R_{di}) + (1 - \theta)(Z R_{dop} - V_{dop} - P_{uoc}) \quad (30)$$

dove

$R_{dop}$  è il valore di una *down-and-out cash-or-nothing put*, con *strike*  $V_T^*$ , barriera  $V_b$  e *rebate* unitario  $R$ , scritta su  $V$ , che paga  $R = \$1$  in  $T$  se  $V_T < V_T^*$  e  $V_t > V_b$  ( $0 < t \leq T$ ):

$$R_{dop} = e^{-rT} \{N(-x + \sigma_V \sqrt{T}) - N(-x_1 + \sigma_V \sqrt{T}) + (V_b / V_0)^{2\lambda - 2} [N(y - \sigma_V \sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma_V \sqrt{T})]\}$$

$V_{dop}$  è il valore di una *down-and-out asset-or-nothing put*, con *strike*  $V_T^*$  e barriera  $V_b$ , scritta su  $V$ , che paga  $V_T$  in  $T$  se  $V_T < V_T^*$  e  $V_t > V_b$ :

$$V_{dop} = V_0 e^{-q_V T} \{N(-x) - N(-x_1) + (V_b / V_0)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)]\}$$

$P_{uoc}$  è il valore di una *up-and-out asset-or-nothing call*, con *strike*  $P_T^*$  e barriera  $P_b$ , scritta su  $P$ , che paga  $P_T$  in  $T$  se  $P_T > P_T^*$  e  $P_t < P_b$ :

$$P_{uoc} = P_0 \{N(x_P) - N(x_{1P}) + (P_b / P_0)^{2\lambda_P} [N(-y_P) - N(-y_{1P})]\}$$

$R_{di}$  è il valore di una *down-and-in (at expiry) cash-or-nothing*, con barriera  $V_b$  e *rebate* unitario  $R$ , scritta su  $V$ , che paga  $R = \$1$  in  $T$  se  $V_t \leq V_b$  ( $0 < t \leq T$ ):

$$R_{di} = e^{-rT} [N(-x_1 + \sigma_V \sqrt{T}) + (V_b / V_0)^{2\lambda - 2} N(y_1 - \sigma_V \sqrt{T})]$$

e

$$x_1 \equiv \frac{\ln(V_0 / V_b)}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T} \quad x_{1P} \equiv \frac{\ln(P_0 / P_b)}{\sigma_P \sqrt{T}} + \lambda_P \sigma_P \sqrt{T}$$

$$y_1 \equiv \frac{\ln(V_b / V_0)}{\sigma_V \sqrt{T}} + \lambda \sigma_V \sqrt{T} \quad y_{1P} \equiv \frac{\ln(P_b / P_0)}{\sigma_P \sqrt{T}} + \lambda_P \sigma_P \sqrt{T}$$

La Tavola 4 mostra un'applicazione delle formule (29) e (30) per le *equity options* di tipo *call* e *put*.

### Put-Call Parity

Le formule (29) e (30) soddisfano la seguente *put-call parity*

$$c - p = (1 - \theta) S_{do} - K e^{-rT}$$

dove

$S_{do}$  è il valore di una *down-and-out asset-or-nothing*, con barriera 0, scritta su  $S$ , che paga  $S_T$  in  $T$  se  $S_t > 0$  ( $0 < t \leq T$ ):

$$S_{do} = V_{do} + P_{uo} - Z R_{do}$$

TAVOLA 4 *Equity options europee.*

	A	B	C
1	<b>Equity Options</b>		
2			
3	Asset value ( $V_0$ )	100	
4	Bond face value ( $Z$ )	50	
5	Strike price ( $K$ )	30	
6	Time to maturity ( $T$ )	1	
7	Tax rate ( $\theta$ )	35%	
8	Bankruptcy costs rate ( $\alpha$ )	5,00%	
9	Risk-free rate ( $r$ )	5,50%	
10	Payout rate ( $q_V$ )	3,50%	
11	Asset volatility ( $\sigma_V$ )	20,00%	
12	Bankruptcy trigger ( $V_b$ )	31,19	
13	Option to default ( $P$ )	2,72	
14	Option to default volatility ( $\sigma_P$ )	33,17%	
15	Tax claim ( $G_0$ )	35,00	
16	Third parties claim ( $U_0$ )	0,15	
17	Bond ( $B_0$ )	30,58	
18	Equity ( $S_0$ )	34,27	
19	Dividend yield ( $q_S$ )	2,19%	
20	Equity volatility ( $\sigma_S$ )	36,22%	
21	Leverage ( $L$ )	1,90	
22	Critical asset value ( $V_T^*$ )	93,09	
23		call	put
24	Down-and-out asset-or-nothing ( $V_{doc}$ or $V_{dop}$ )	44,67	18,10
25	Up-and-out asset-or-nothing ( $P_{uop}$ or $P_{uoc}$ )	0,90	0,87
26	Down-and-out cash-or-nothing [ $(Z + K) R_{doc}$ or $(Z + K) R_{dop}$ ]	37,86	21,30
27	Down-and-in cash-or-nothing ( $K R_{di}$ )	0,00	0,00
28	Equity option ( $c$ or $p$ )	7,72	2,34
29		$c - p$	$(1 - \theta)S_{do} - Ke^{-rT}$
30	Put-call parity	5,38	5,38

e

$$V_{do} = V_0 e^{-q_V T} [N(x_1) - (V_b / V_0)^{2\lambda} N(y_1)]$$

$$P_{uo} = P_0 [N(-x_{1P}) - (P_b / P_0)^{2\lambda_P} N(-y_{1P})]$$

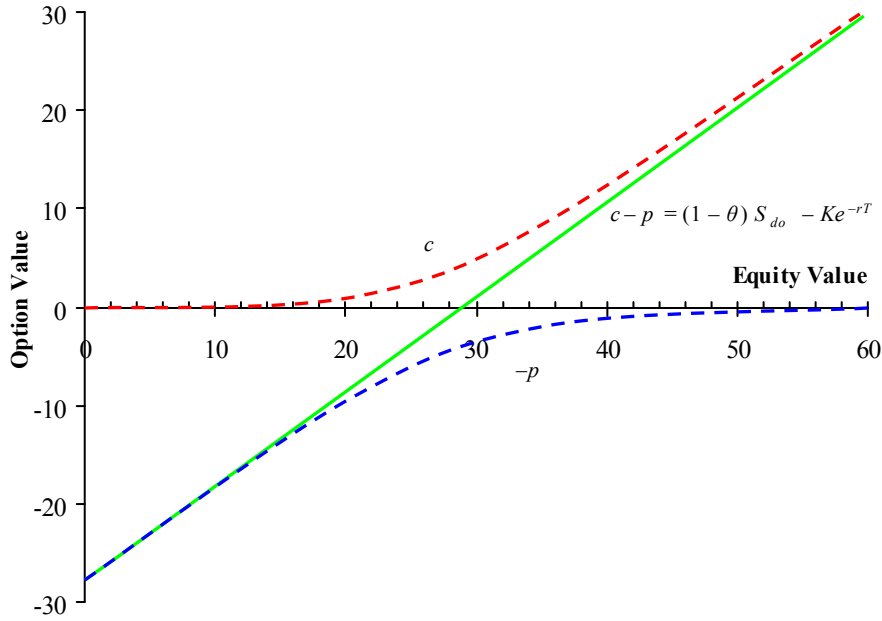
$$R_{do} = e^{-rT} [N(x_1 - \sigma_V \sqrt{T}) - (V_b / V_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma_V \sqrt{T})]$$

e le altre variabili sono state già definite.

La Figura 3 mostra i valori delle opzioni *call* e *put* in funzione del valore delle azioni, per dati parametri del modello. Il grafico mostra anche la *put-call parity*, misurata dalla differenza  $c - p$ .

### Stima del Modello

La *input list* richiesta per la stima del valore delle *equity options* con il modello Black-Scholes-Merton include  $S_0$ ,  $q_S$  e  $\sigma_S$ . Se aggiungiamo il *leverage*,  $L$ , alla lista, possiamo stimare  $V_0$ ,  $q_V$ ,  $\sigma_V$  e  $Z$  risolvendo un sistema di quattro equazioni simultanee.



**Figura 3** Equity put-call parity ( $r = 5.5\%$ ,  $q_V = 3.5\%$ ,  $\sigma_V = 20\%$ ,  $Z = 50$ ,  $\theta = 35\%$ ,  $V_b = 31.19$ ,  $K = 30$ ,  $T = 1$ ).

La prima equazione pone uguale a zero la differenza tra il valore teorico e il valore di mercato dell'*equity*:

$$(1-\theta)[V_0 - Z + (Z - V_b)(V_0/V_b)^{\eta}] - S_0 = 0$$

La seconda equazione, ricavata applicando il lemma di Itô, pone uguale a zero la differenza tra il livello teorico e la stima di mercato dell'*equity volatility*:

$$\frac{\Delta_S \sigma_V V_0}{S_0} - \sigma_S = 0$$

La terza equazione pone uguale a zero la differenza tra il livello teorico e la stima di mercato del *dividend yield*:

$$\left( q_V \frac{V}{S} - r \frac{Z}{S} \right) - q_S = 0$$

Infine, la quarta equazione pone uguale a zero la differenza tra il livello teorico e il livello effettivo del *leverage*:

$$\frac{(1-\theta)V_0}{S_0} - L = 0$$

Queste equazioni possono essere risolte numericamente. La Tavola 5 mostra un foglio di lavoro in cui il Risolitore di Excel è stato utilizzato per stimare i parametri del modello  $V_0$ ,  $q_V$ ,  $\sigma_V$ ,  $Z$  in base all'*input list*  $S_0$ ,  $q_S$ ,  $\sigma_S$ ,  $L$  (oltre a  $r$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $K$  e  $T$ ).

## 5. DUE APPLICAZIONI: LEHMAN BROTHERS E GENERAL MOTORS

Nella Sezione 3, la Tavola 3 mostra la soluzione di un problema inverso: il calcolo delle probabilità d'insolvenza implicite in base alle probabilità d'insolvenza effettive riportate da Moody's per alcune classi di *rating*. Invece nella Sezione 4, la Tavola 4 e la Tavola 5 mostrano la soluzione di un problema diretto: il valore delle *equity options* sulla base di due diverse *input lists*, che includono  $(V_0, q_V, \sigma_V, Z)$  o  $(S_0, q_S, \sigma_S, L)$ .

TAVOLA 5 Equity options europee.

	A	B	C	D
1	<b>Equity Options</b>			
2		<i>Actual</i>	<i>Theoretical</i>	<i>Sq. errors</i>
3	Equity ( $S_0$ )	34,27	34,27	0,00000
4	Leverage ( $L$ )	1,90	1,90	0,00000
5	Dividend yield ( $q_S$ )	2,19%	2,19%	0,00000
6	Equity volatility ( $\sigma_S$ )	36,22%	36,22%	0,00000
7	Risk-free rate ( $r$ )	5,50%	SSE	0,00000
8	Tax rate ( $\theta$ )	35%		
9	Bankruptcy costs rate ( $\alpha$ )	5%		
10	Strike price ( $K$ )	30,00		
11	Time to maturity ( $T$ )	1		
12	Asset value ( $V_0$ )	100,00		
13	Payout rate ( $q_V$ )	3,50%		
14	Asset volatility ( $\sigma_V$ )	20,00%		
15	Bond face value ( $Z$ )	50,00		
16	Bankruptcy trigger ( $V_b$ )	31,19		
17	Option to default ( $P$ )	2,72		
18	Option to default volatility ( $\sigma_P$ )	33,17%		
19	Tax claim ( $G_0$ )	35,00		
20	Third parties claim ( $U_0$ )	0,15		
21	Bond ( $B_0$ )	30,58		
22	Critical asset value ( $V_T^*$ )	93,09		
23		call	put	
24	Down-and-out asset-or-nothing ( $V_{doc}$ or $V_{dop}$ )	44,67	18,10	
25	Up-and-out asset-or-nothing ( $P_{uop}$ or $P_{uoc}$ )	0,90	0,87	
26	Down-and-out cash-or-nothing [ $(Z + K)R_{doc}$ or $(Z + K)R_{dop}$ ]	37,86	21,30	
27	Down-and-in cash-or-nothing ( $K R_{di}$ )	0,00	0,00	
28	Equity option ( $c$ or $p$ )	7,72	2,34	
29		$c - p$	$(1 - \theta)S_{do} - Ke^{-T}$	
30	Put-call parity	5,38	5,38	

Ora vedremo come risolvere un altro problema inverso: la calibratura del modello basata sugli *spreads* dei *credit default swaps* e sulle quotazioni di *equity* ed *equity options*. Prenderemo in esame le quotazioni giornaliere di Lehman Brothers e General Motors.

### Lehman Brothers

Come in Brigo-Morini-Tarengi (2009), ci concentriamo su tre diverse date: 10 luglio 2007, 12 giugno 2008, 12 settembre 2008.<sup>23</sup> La terza data rappresenta l'ultimo giorno lavorativo prima della dichiarazione d'insolvenza di Lehman (14 settembre 2008).

La Tavola 6 riporta i CDS *spreads* (effettivi e teorici) di Lehman insieme con le quotazioni (effettive e teoriche) delle azioni Lehman.

Dopo aver fissato  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $r$ , abbiamo stimato gli altri parametri del modello ( $V$ ,  $Z$ ,  $q_V$ ,  $\sigma_V$ ) minimizzando la somma dei quadrati delle differenze logaritmiche tra valori effettivi e teorici dei CDS *spreads* e delle quotazioni azionarie.<sup>24</sup>

<sup>23</sup> Si veda BRIGO, Damiano, MORINI, Massimo, and TARENGHI, Marco, "Credit Calibration with Structural Models - The Lehman Case and Equity Swaps under Counterparty Risk", Working Paper, 2009.

<sup>24</sup> Per stimare i valori dei parametri che minimizzano la funzione obiettivo, è stato utilizzato il Risolutore di Excel. La *routine* funziona bene se il foglio di lavoro è strutturato in modo che i parametri da stimare abbiano valori all'incirca uguali. Dato che a volte il Risolutore si blocca su un minimo locale, sono stati utilizzati valori diversi per le stime iniziali dei parametri.

**TAVOLA 6** Lehman Brothers: calibratura del modello basata su CDSs ed *equity*.

Data	CDSs								Equity			
	Maturity	Zero Rate	Default Prob.	Survival Prob.	Default Intensity	Actual Spread	Theoretical Spread	Squared Error	Market Value	Theoretical Value	Squared Error	
	$T-t$	$r$	$Q$	$1-Q$	$\lambda$	$s_{mkt}$	$s$	$[\ln(s_{mkt}/s)]^2$	$S_{mkt}$	$S$	$[\ln(S_{mkt}/S)]^2$	
10/7/2007	1	5,417%	0,68%	99,32%	0,68%	16	14	2,11	69,67	69,67	0,000	
	3	5,322%	6,95%	93,05%	2,40%	29	48	25,55				
	5	5,437%	11,58%	88,42%	2,46%	45	50	1,02				
	7	5,540%	14,53%	85,47%	2,24%	50	46	0,55				
	10	5,656%	17,25%	82,75%	1,89%	58	41	11,85				
										<b>Sum of Sq. Errors</b>		
											SSE	41,08
12/6/2008	1	3,490%	13,69%	86,31%	14,72%	397	380	0,18	22,51	22,51	0,000	
	3	4,289%	32,67%	67,33%	13,19%	315	354	1,34				
	5	4,608%	40,37%	59,63%	10,34%	277	294	0,34				
	7	4,772%	44,63%	55,37%	8,44%	258	254	0,02				
	10	4,925%	48,40%	51,60%	6,62%	240	216	1,11				
										<b>Sum of Sq. Errors</b>		
											SSE	3,01
12/9/2008	1	3,122%	35,83%	64,17%	44,36%	1,437	1,393	0,10	3,65	3,65	0,000	
	3	3,465%	55,40%	44,60%	26,91%	902	949	0,26				
	5	3,853%	62,08%	37,92%	19,39%	710	752	0,32				
	7	4,123%	65,67%	34,33%	15,27%	636	641	0,01				
	10	4,388%	68,85%	31,15%	11,66%	588	543	0,63				
										<b>Sum of Sq. Errors</b>		
											SSE	1,31

Data	Parametri del Modello				Output del Modello						
	Asset Value	Bond's Face Value	Payout Rate	Asset Volatility	Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Recovery Rate
	$V$	$Z$	$q_V$	$\sigma_V$	$L$	$V_b$	$P$	$\sigma_P$	$B_0$	$y$	$R$
10/7/2007	564,5	469,6	0,01%	14,94%	5,269	392,1	12,2	75,63%	295,3	5,85%	79,35%
12/6/2008	450,1	464,1	0,01%	16,99%	13,022	358,8	48,7	57,89%	264,7	5,61%	73,47%
12/9/2008	168,6	200,5	0,01%	18,36%	30,164	144,8	37,5	47,71%	102,8	5,56%	68,63%

Nota: i parametri esogeni del modello sono  $\theta = 35\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $r = 5,66\%$  (10 lug 2007),  $4,92\%$  (12 giu 2008),  $4,39\%$  (12 set 2008). Tutti i pesi sono pari a 1, fatta eccezione per i pesi dell'*equity*, che sono pari a 30 (10 lug 2007), 20 (12 giu 2008), 10 (12 set 2008).

Sono state utilizzate le differenze logaritmiche ponderate perché i CDS *spreads* e le quotazioni azionarie sono misurati in unità diverse. I pesi consentono il *perfect fit* delle quotazioni azionarie.

La stima di *cross-section* dei parametri del modello è stata effettuata separatamente per ciascuna delle suddette date. I risultati sono stati conformi alle aspettative:

1. il valore delle attività,  $V$ , diminuisce col passare del tempo;
2. il *leverage*,  $L$ , aumenta in tutto il periodo sotto osservazione (da 5,269 a 30,164). Come nella (18),  $L$  è il rapporto tra il valore delle attività dopo le imposte,  $(1 - \theta) V$ , e il valore,  $S$ , dell'*equity*;
3. simultaneamente, anche il *business risk*, misurato da  $\sigma_V$ , aumenta (da 14,94% a 18,36%);
4. le *term structures* delle probabilità d'insolvenza (non condizionate, neutrali verso il rischio) e delle corrispondenti *default intensities* si spostano verso l'alto. Tuttavia, il 12 settembre 2008 l'immediato futuro di Lehman Brothers non era affatto chiari: le probabilità d'insolvenza e di sopravvivenza a 1 anno erano pari al 35,83% e al 64,17%, rispettivamente;<sup>25</sup>
5. il *recovery rate*,  $R$ , diminuisce leggermente (dal 79,35% al 68,63%).

<sup>25</sup> Le intensità d'insolvenza implicite differiscono da quelle calcolate in Brigo *et al.*, *op. cit.*, perché i nostri valori si basano su *recovery rates* diversi.

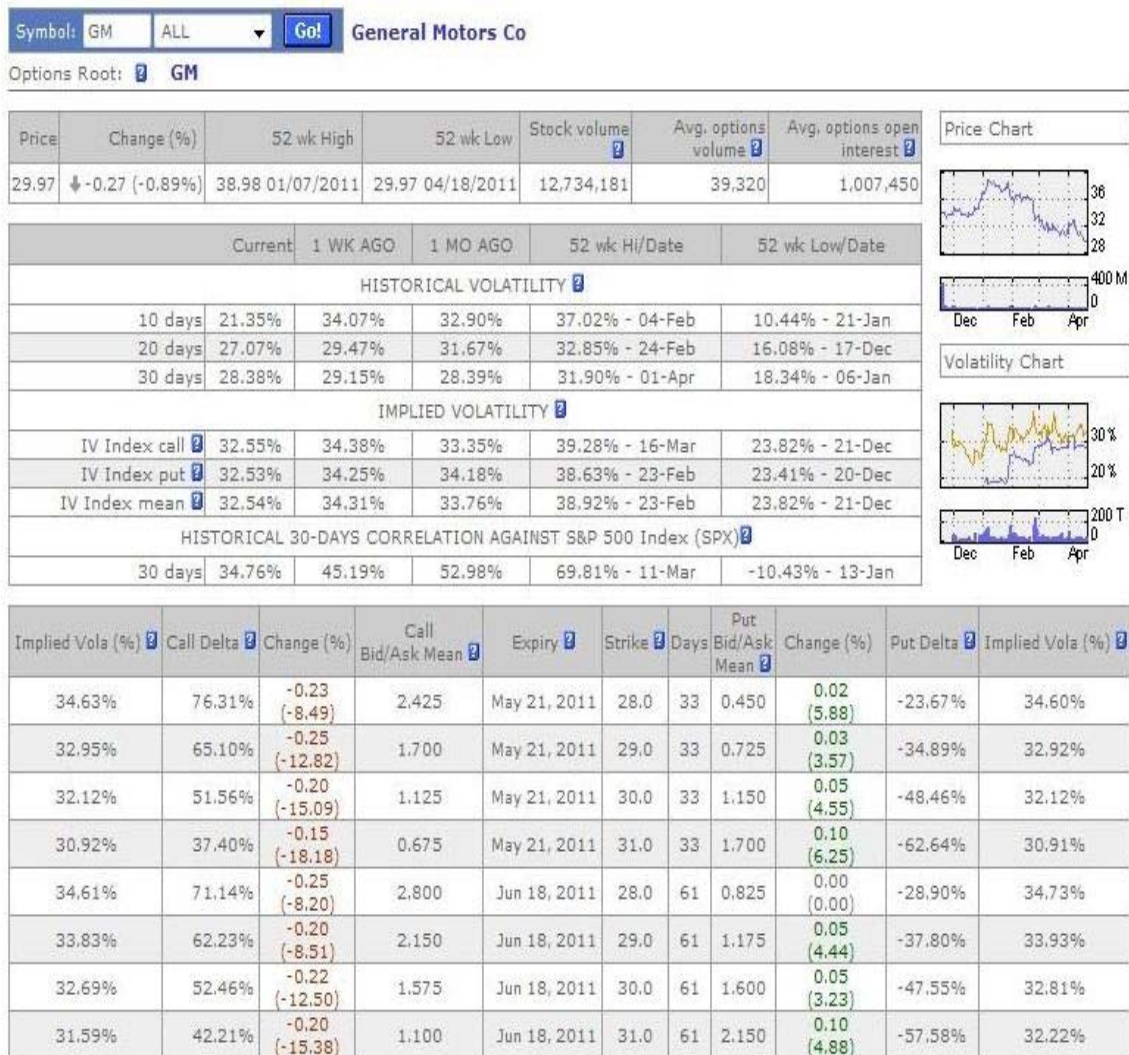


Figura 4 Opzioni su General Motors: volatilità implicite (CBOE, 18 aprile 2011). Fonte: IVolatility.com

## General Motors

Come seconda applicazione del modello, abbiamo utilizzato i dati di mercato di General Motors (GM). Il 18 aprile 2011, ultima data disponibile, abbiamo rilevato i CDS *spreads*, le quotazioni di *equity* ed *equity options*, e l'*equity volatility*.

Le volatilità implicite delle opzioni su GM trattate alla CBOE mostrano la consueta relazione inversa rispetto ai prezzi d'esercizio (Figura 4).

I risultati della calibratura sono mostrati nella Tavola 7. Il *fit* del modello è meno buono rispetto a Lehman. Le valutazioni fatte nel mercato dei CDSs non sembrano essere allineate con le quotazioni di mercato di *equity* ed *equity options*.<sup>26</sup> Per spiegare gli elevati CDS *spreads*, sarebbe necessario assumere un *business risk* molto elevato, che determinerebbe livelli irragionevolmente elevati dell'*equity volatility*.

La conclusione, basata sul modello, è che il mercato dei CDSs sembra essere molto più pessimista sul futuro di GM di quanto non lo sia il mercato di *equity* ed *equity options*. Se ci si fida del modello, c'è spazio per il *convergence trading*.

<sup>26</sup> Alcune recenti ricerche empiriche documentano una «lenta diffusione delle informazioni tra il mercato dei CDSs e il mercato azionario». Si veda HAN, Bing, and ZHOU, Yi, "Term Structure of Credit Default Swap Spreads and Cross-Section of Stock Returns", Working Paper, March 2011.

**TAVOLA 7** General Motors: calibratura del modello basata su CDSs, equity, equity options ed equity volatility.

CDSs										
Data	Scadenza	Zero Rate	Default Probability	Survival Probability	Av. Default Intensity	Actual Spread	Theoretical Spread	Squared Error		
$t$	$T-t$	$r$	$Q$	$1-Q$	$\lambda$	$s_{mkt}$	$s$	$[\ln(s_{mkt}/s)]^2$		
18/4/2011	1	0,772%	1,51%	98,49%	1,52%	94	68	10,23%		
	3	1,353%	19,37%	80,63%	7,18%	214	304	12,34%		
	5	2,284%	34,58%	65,42%	8,49%	331	355	0,50%		
	7	2,953%	45,27%	54,73%	8,61%	377	364	0,12%		
	10	3,568%	56,24%	43,76%	8,26%	408	361	1,50%		
								24,68%		
Equity Options										
Scadenza	Vita Residua	Zero Rate	Strike	Implied Volatility	Critical Value	Market Value	Theoretical Value	Squared Error		
$T$	$T-t$	$r$	$K$	$\sigma_{imp}$	$V_T^*$	$c_{mkt}$	$c$	$[\ln(c_{mkt}/c)]^2$		
21/5/2011	0,09	0,212%	28	34,63%	468,2	2,425	1,682	13,40%		
		0,212%	29	32,95%	471,0	1,700	1,347	5,42%		
		0,212%	30	32,12%	473,8	1,125	1,066	0,29%		
		0,212%	31	30,92%	476,5	0,675	0,834	4,49%		
								23,60%		
18/6/2011	0,17	0,247%	28	34,61%	468,2	2,800	2,572	0,72%		
		0,247%	29	33,83%	471,0	2,150	2,205	0,06%		
		0,247%	30	32,69%	473,8	1,575	1,881	3,15%		
		0,247%	31	31,59%	476,5	1,100	1,595	13,81%		
								17,75%		
Equity			Equity Volatility			Sum of Squared Errors				
Data	Market Value	Theoretical Value	Squared Error	Market Value	Theoretical Value	Squared Error				
$t$	$S_{mkt}$	$S$	$[\ln(S_{mkt}/S)]^2$	$\sigma_{mkt}$	$\sigma_S$	$[\ln(\sigma_{mkt}/\sigma_S)]^2$	SSE			
4/18/2011	29,97	26,08	1,93%	32,54%	78,24%	76,96%	144,92%			
Parametri del Modello				Output del Modello						
Asset Value	Bond's Face Value	Payout Rate	Asset Volatility	Leverage	Bankruptcy Trigger	Option to Default	Option to Default Vol.	Bond	Bond Yield	Recovery Rate
$V$	$Z$	$q_V$	$\sigma_V$	$L$	$V_b$	$P$	$\sigma_P$	$B_0$	$y$	$R$
462,6	588,7	4,39%	12,82%	11,5	333,9	166,2	16,80%	267,6	5,10%	53,89%

Nota: i parametri esogeni del modello sono  $\theta = 35\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $r = 3,57\%$ . Tutti i pesi sono pari a 1.

## 6. CONCLUSIONI

Abbiamo presentato un modello strutturale *à la* Leland (1994), che può essere utilizzato per valutare derivati azionari e creditizi in modo coerente. Nel modello, gli azionisti emettono un'obbligazione perpetua a tasso fisso e dispongono di un'opzione americana perpetua che consente loro di dichiarare in qualsiasi istante il fallimento della società. Gli azionisti determinano il *default point* ottimale (costante) che massimizza il valore dell'*equity*. Di conseguenza, la probabilità d'insolvenza a  $T$  anni è pari alla probabilità che il valore delle attività raggiunga il *default point* entro il tempo  $T$ . Le probabilità d'insolvenza possono essere calcolate utilizzando la *first-passage time distribution function*. A-

nalogamente, i CDS *spreads* a  $T$  anni possono essere calcolati utilizzando la formula per le *first-touch digital options* a scadenza finita.

L'*equity* equivale a un portafoglio che è lungo sulle attività dell'impresa, corto su un *risk-free bond* perpetuo, lungo su una *perpetual American option to default* e corto sulla *tax claim*. L'*equity volatility* è stocastica, essendo una complessa funzione del valore e della volatilità delle attività dell'impresa. Semplicemente aggiungendo un altro parametro, il *leverage*, alla *input list* standard del modello Black-Scholes-Merton, i *traders* possono valutare le *equity options* in modo coerente con il *volatility skew* inclinato negativamente che si osserva nei mercati delle *equity options*. Data la natura opzionale dell'*equity*, le *equity options* sono opzioni composte scritte sul valore delle attività dell'impresa. Possono essere valutate con le formule Rubinstein-Reiner (1991) per le opzioni binarie con barriera, che richiedono solo il calcolo della funzione di distribuzione della normale univariata.

Il modello può essere utilizzato per risolvere problemi diretti e inversi. Come esempio di un problema diretto, abbiamo determinato il valore delle *equity options* in base a due diverse *input lists* e, come esempio di un problema inverso abbiamo mostrato il calcolo delle probabilità d'insolvenza implicite basate sulle frequenze storiche d'insolvenza riportate da Moody's per alcune classi di rating. Infine, abbiamo preso in esame i dati di mercato di Lehman Brothers e General Motors per mostrare come si può calibrare il modello in base ai CDS *spreads* e alle quotazioni di *equity* e *equity options*.



## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- BAI, Jennie, e WU, Liuren, “Anchoring Corporate Credit Spreads to Firm Fundamentals”, Working Paper, June 2010.
- BARONE, Gaia, “European Compound Options written on Perpetual American Options”, “Tor Vergata” University of Rome, Working Paper, November 2010 [downloadable at <http://ssrn.com/author=1004723>].
- BARONE, Gaia, “Equity Options and Bond Options in the Leland Model”, “Tor Vergata” University of Rome, Working Paper, March 2011 [downloadable at <http://ssrn.com/author=1004723>].
- BLACK, Fischer S., e COX, John C., “Valuing Corporate Securities - Some Effects of Bond Indenture Provisions”, *Journal of Finance* 31 (2), 351-367, 1976.
- BRIGO, Damiano, MORINI, Massimo, e TARENGHI, Marco, “Credit Calibration with Structural Models - The Lehman Case and Equity Swaps under Counterparty Risk”, Working Paper, 2009.
- COX, John C., INGERSOLL, Jonathan E., e ROSS, Stephen A., “Duration and the Measurement of Basis Risk”, *Journal of Business*, vol. 52, no. 1, pp. 51-61, January 1979.
- COX, John C., INGERSOLL, Jonathan E., e ROSS, Stephen A., “An Analysis of Variable Rate Loan Contracts”, *Journal of Finance*, vol. 35, no. 2, pp. 389-403, May 1980.
- DÉCAMPS, Jean-Paul, e VILLENEUVE, Stéphane, “On the modeling of Debt Maturity and Endogenous Default - A Caveat”, Working Paper, May 2008.
- DUFFIE, Darrell, e SINGLETON, Ken J., *Credit Risk*, Princeton University Press, 2003.
- ERICSSON, Jan, e RENEBY, Joel, “A Note on Contingent Claims Pricing with Non-Traded Assets”, SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 314, June 2002.
- GOLDSTEIN, Robert, JU, Nengjiu, e LELAND, Hayne, “An EBIT-Based Model of Dynamic Capital Structure”, *Journal of Business*, vol. 74, no. 4, 2001.
- HAN, Bing, e ZHOU, Yi, “Term Structure of Credit Default Swap Spreads and Cross-Section of Stock Returns”, Working Paper, March 2011.
- HULL, John C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson, 8<sup>th</sup> ed., 2011.
- INGERSOLL, Jonathan E., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987.
- KAHN, Joseph, e TRUPELL, Peter, “Troubled Investment Fund’s Bets Now Estimated at \$1.25 Trillion”, *Wall Street Journal*, September 26, 1998.
- LELAND, Hayne, “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure”, *Journal of Finance*, 49 (4), pp. 1213-52, September 1994.
- LELAND, Hayne, “Bond Prices, Yield Spreads, and Optimal Capital Structure with Default Risk”, Finance Working Paper no. 240, Haas School of Business, University of California at Berkeley, January 1995.
- LELAND, Hayne, “Princeton Lectures” [*Lecture 1 - Pros and Cons of Structural Models - An Introduction, Lecture 2 - A New Structural Model, Lecture 3 - Financial Synergies and the Optimal Scope of the Firm - Implications for Mergers and Structured Finance*], 2006.
- LELAND, Hayne, “Structural Models and the Credit Crisis”, China International Conference in Finance, July 8, 2009.
- MERTON, Robert C., “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance* 29, No. 2 (May 1974), pp. 449-470, reprinted in Robert C. Merton, *Continuous-Time Finance*, Chapter 12 (Malden, MA: Blackwell, 1990), pp. 388-412.
- MODIGLIANI, Franco, e MILLER, Merton H., “The cost of capital, corporation finance and the theory of investment”, *American Economic Review*, vol. 48, no. 3, pp. 267-297, June 1958.
- RUBINSTEIN, Mark e REINER, Eric, “Unscrambling the Binary Code”, *Risk*, vol. 4, no. 9, pp. 75-83, October 1991.
- TOFT, Klaus Bjerre Toft, “Options on Leveraged Equity with Default Risk”, Walter A. Haas School of Business, University of California at Berkeley, July 1994.
- TOFT, Klaus Bjerre Toft, e PRUCYK, Bryan, “Options on Leveraged Equity: Theory and Empirical Tests”, *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 3, pp. 1151-1180, July 1997.
- WARNER, Jerold B., “Bankruptcy Costs: Some Evidence”, *Journal of Finance*, vol. 32, no. 2, pp. 337-47, May 1977.